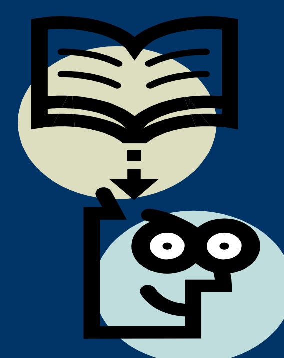
LOGIKA SIMBOLIK

Bagian II

LOGIKA

Realitas → Kalimat/ Pernyataan → Logis → LOGIKA



Apakah logika itu?

- Logika: Ilmu untuk berpikir dan bernalar dengan benar
- Penalaran: Kemampuan untuk berpikir menurut suatu alur kerangka tertentu
- Kemampuan Menalar: Kemampuan untuk menarik konklusi yang tepat dari bukti-bukti yang ada dan menurut aturan tertentu

Aliran-aliran dalam Logika

- Logika Tradisional

  Tokoh: Aristoteles

  Logika merupakan kumpulan aturan praktis yang menjadi petunjuk pemikiran. Logika saat itu disebut dengan istilah ANALITIKA dan DIALEKTIKA.

  ANALITIKA: untuk menyebutkan cara penalaran yang didasarkan pada pernyataan-pernyataan yang benar.

  DIALEKTIKA: untuk cara penalaran yang didasarkan pada dugaan.

- Logika Metafisis

  Tokoh: Friderich Hegel (1770-1831)

  METAFISIKA: sebagai upaya untuk menyajikan kenyataan (realitas), yaitu alam semesta dan isinya sebagai suatu keseluruhan yang komprehensif, koheren dan konsisten. Susunan pikiran dianggap suatu kenyataan, sehigga logika disebut metafisika.

- Logika Epistemologis
  Tokoh: Francis Herbert Bradley (1846-1924) dan Bernard Bosanquet (1848-1923).
  Logika ini dihubungkan dengan pengetahuan lainnya. Untuk dapat mencapai pengetahuan yang memadai, pikiran logis dan perasaan harus digabungkan.

- Logika Instrumentalis (Pragmatis)
  Tokoh: John Dewey (1859-1952)
  Logika dianggap sebagai alat untuk memecahkan masalah.

- Logika Simbolis (Logika Matematis)
  Tokoh: G.W. Leibniz (1646-1716), George Boole (1815-1864), De Morgan, Leonhard Euler (1707-1783), Alfred North Whitehead dan Bertrand Russell (1872-1970)
  Menekankan penggunaan bahasa simbol untuk mempelajari secara rinci, bagaimana akal harus berkerja. Logika ini merupakan logika formal yang hanya menelaah bentuk dan bukan isi apa yang dibicarakan.

Pernyataan

- Kalimat
  - K. Berarti
    - K. Deklaratif (Pernyataan)
      - Benar
      - Salah
    - Bukan Kal. Deklaratif
  - K. Tak Berarti

- Kalimat deklaratif = Indicative Sentence
- Pernyataan = Statement
- Bila proposisi $\neq$ pernyataan, maka pernyataan lebih umum daripada proposisi
- Proposisi merupakan kalimat deklaratif
- Paradoks: Kalimat yang menegasikan dirinya sendiri.

  Misal: Semua peraturan mempunyai perkecualian.

Pernyataan

- Perny. Sederhana (Primer/Atom): Tunggal tidak terdapat kata hubung.
- Perny. Majemuk (Composite/Compound Statement): Satu atau lebih pernyataan sederhana
- Simbol pernyataan dengan huruf kecil: p, q, r, dsb

Kalimat Matematika

- Kalimat Matematika
  - K. Terbuka
    - Persamaan
    - Pertidaksamaan
  - K. Tertutup
    - Kesamaan
    - Ketidaksamaan

Variabel, Konstanta, parameter

- Variabel: Simbol untuk menunjukkan suatu anggota yang belum spesifik dalam semesta pembicaraan.

Persamaan : $x^2 + x - 6 = 0$

$$y = mx + c$$

$$y = r \sin t, \; x = r \cos t$$

- Konstanta: Simbol untuk menunjukkan suatu anggota tertentu (sudah spesifik) dalam semesta pembicaraan.

- Parameter: Variabel penghubung

Kata Hubung Kalimat

- Negasi (Ingkaran)
- Konjungsi
- Disjungsi
- Implikasi
- Biimplikasi

Negasi (Ingkaran)

- Kata sehari-hari: bukan, tidak benar
- Definisi:

  Ingkaran suatu pernyataan (misalkan p) adalah pernyataan lain yang bernilai benar, jika pernyataan semula salah, dan sebaliknya.
- Notasi: $\sim p$, $\neg p$

Tabel Kebenaran

p	~p
B	S
S	B

Konjungsi

- Kata sehari-hari: dan, juga, padahal, tetapi, walaupun, sedangkan, dsb

- Definisi: Konjungsi dari dua pernyataan (misalkan p dan q) bernilai benar, jika dua pernyataan bernilai benar.

- Notasi: $p \wedge q$

Tabel Kebenaran

p	q	$p \wedge q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	S

Disjungsi

- Kata sehari-hari: atau

- Disjungsi dibagi dua:
  1. Disjungsi Inklusif ($\vee$)
  2. Disjungsi Eksklusif ($\underline{\vee}$)

Disjungsi Inklusif

- Definisi:
  Disjungsi Inklusif dari dua pernyataan (p dan q) bernilai benar, jika salah satu dari dua pernyataan itu bernilai benar

p	q	$p \vee q$
B	B	B
B	S	B
S	B	B
S	S	S

Disjungsi Eksklusif

- Definisi:
  Disjungsi Eksklusif dari dua pernyataan (p dan q) bernilai benar, jika hanya salah satu dari dua pernyataan itu bernilai benar

p	q	$p \underline{\vee} q$
B	B	S
B	S	B
S	B	B
S	S	S

Implikasi

- Notasi: $p \rightarrow q$ dibaca
  "jika p, maka q"
  "p berimplikasi q"
  "p hanya jika q"
  "p syarat cukup untuk q"
  "q syarat perlu untuk p"
  "q asal saja p"
  "q jika p"

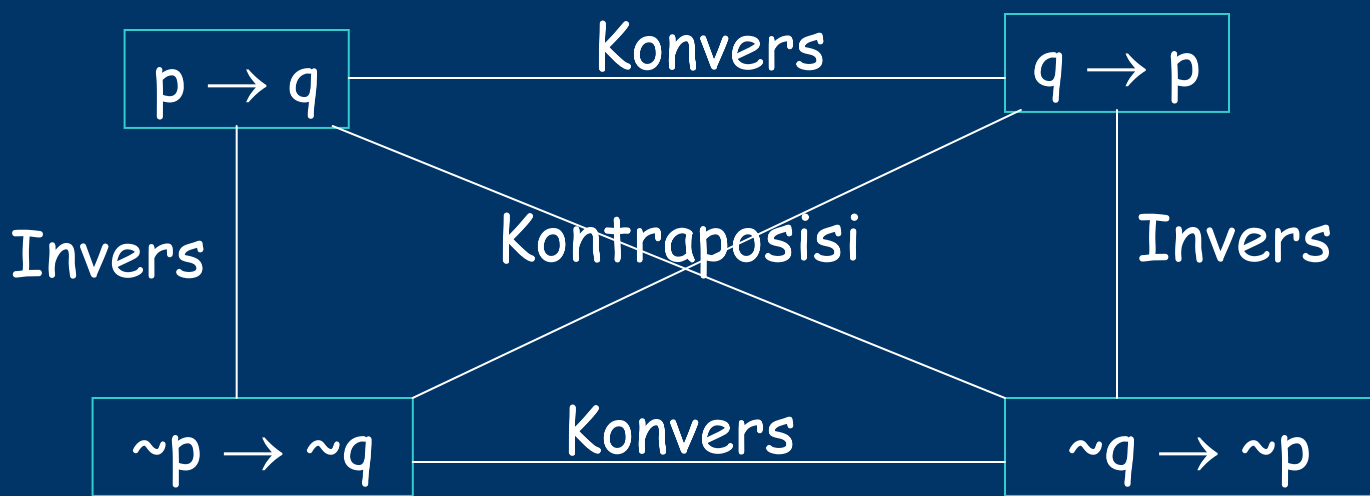
- P = anteseden (hipotesis)
- q = konskuen (konklusi)

Tabel Kebenaran

- Definisi: Implikasi dua pernyataan ($p \to q$) bernilai benar jika anteseden salah atau konskuennya benar.

p	q	$p \to q$
B	B	B
B	S	S
S	B	B
S	S	B

Hubungan Implikasi, Konvers, Invers dan Kontraposisi



Biimplikasi

- Biimplikasi dari dua pernyataan p dan q dinotasikan $p \leftrightarrow q$, dibaca:
  "p jika dan hanya jika q"
  "p syarat perlu dan cukup untuk q"
  "q syarat perlu dan cukup untuk p"
  "jika p maka q dan jika q maka p"

- Definisi:
  Biimplikasi dari dua pernyataan bernilai benar, jika dua pernyataan itu bernilai sama

p	q	$p \leftrightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	B

Urutan Pengerjaan

Negasi
Konjungsi/Disjungsi
Implikasi
Biimpilkasi

Contoh:

$\neg p \vee q$	berarti	$(\neg p) \vee q$
$p \rightarrow q \wedge r$	berarti	$p \rightarrow \mathbf{(q \wedge r)}$

- Sebagai contoh, kita ingin melihat tabel kebenaran pernyataan:

$$p \to \sim q \vee p \wedge r$$

Bagaimana tabel kebenran pernyataan itu?

p	q	r	$\sim q$	$p \wedge r$	$\sim q \vee (p \wedge r)$	$p \rightarrow (\sim q \vee (p \wedge r))$
B	B	B	S	B	B	B
B	B	S	S	S	S	S
B	S	B	B	B	B	B
B	S	S	B	S	B	B
S	B	B	S	S	S	B
S	B	S	S	S	S	B
S	S	B	B	S	B	B
S	S	S	B	S	B	B

Tautologi

- Setiap pernyataan yang selalu bernilai benar untuk setiap nilai kebenaran komponen-komponennya.
- Contoh: $p \vee \sim p$

p	~p	p ∨ ~p
B	S	B
S	B	B

Ekuivalen

- Dua pernyataan dikatakan ekuivalen (ekuivalen logis) jika kedua pernyataan mempunyai nilai kebenaran yang tepat sama.

- Notasi: $\equiv$
- Sifat pernyataan yang ekuivalen:

1. $p \equiv p$ (refleksif)
2. $p \equiv q \rightarrow q \equiv p$ (simetris)
3. $p \equiv q,\ q \equiv r \rightarrow p \equiv r$ (transitif)

$p \equiv q$ dapat sebagai $p \leftrightarrow q$ atau "sama dengan"

Buatlah tabel kebenaran dari pernyataan berikut

1. $p \rightarrow q$
2. $\sim p \vee q$
3. $\sim p \rightarrow \sim q$
4. $\sim q \rightarrow \sim p$
5. $q \rightarrow p$

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim p \vee q$
B	B	B	B
B	S	S	S
S	B	B	B
S	S	B	B

Kontradiksi

- Pernyataan yang selalu bernilai salah, untuk setiap nilai kebenaran komponen-komponennya.
- Contoh: $p \wedge \sim p$

p	~p	$p \wedge$ ~p
B	S	S
S	B	S

Kuantor

- Fungsi Pernyataan: Suatu kalimat terbuka dalam semesta pembicaraannya (semesta diberikan secara eksplisit atau implisit)
- Notasi: p(x) yang bersifat p(a) bernilai benar atau salah (tidak keduanya) untuk setiap nilai a.

a adalah anggota semesta pembicaraan

p(a) suatu pernyataan

Contoh:

$p(x) \equiv 1 + x > 5$, fungsi pernyataan untuk A = himpunan bilangan asli, bukan untuk fungsi pernyataan K = himpunan bilangan kompleks.

Bila himpunan semestanya bilangan asli, maka:

1. $p(x) \equiv 1 + x > 5$; bernilai benar untuk x = 5,6,7,... Dengan kata lain untuk *beberapa* anggota semesta.
2. $q(x) \equiv x + 3 < 1$; *tidak ada* anggota semesta yang memenuhi.
3. $r(x) \equiv 1 + x = 5$; bernilai benar untuk x = 4, dengan kata lain *hanya ada satu* anggota semesta yang memenuhi.
4. $s(x) \equiv x^2 > 0$; bernilai benar *untuk semua* x anggota semesta.

Kata-kata “beberapa”, “tidak ada”,”hanya satu”, “untuk semua” dapat diganti menggunakan simbol KUANTOR

- Kuantor Umum (Universal)

“$\forall$” dibaca “untuk semua”, “ untuk setiap”

$(\forall x \in A)(p(x))$ atau $\forall_x, p(x)$ atau $\forall_x\, p(x)$ dibaca “untuk setiap x anggota A, p(x) merupakan pernyataan yang benar” atau “untuk semua x berlakulah p(x)”

- Kuantor Khusus (Eksistensial)

"$\exists$" dibaca "untuk beberapa" atau "untuk paling sedikit satu"

"$\exists!$" dibaca " ada hanya satu"

$(\exists\ x \in A) \ni (p(x))$ atau $\exists_x, p(x)$ atau $\exists_x\ p(x)$ dibaca "ada x anggota *A* sedemikian hingga p(x) merupakan pernyataan yang benar" atau "untuk beberapa x, p(x)"

Negasi Pernyataan

$$\neg\,(\forall\, x \in A)\,(p(x)) \equiv (\exists\, x \in A)\,\neg(p(x))$$

$$\neg\,(\exists\, x \in A)\,(p(x)) \equiv (\forall\, x \in A)\,\neg(p(x))$$

Fungsi Pernyataan lebih dari satu Variabel

Diketahui himpunan A_1, A_2, ... A_n.
Suatu fungsi pernyataan yang mngandung variabel pada himpunan $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ merupakan kalimat terbuka $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ yang memiliki sifat $p(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ bernilai benar atau salah (tidak keduanya) untuk $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ anggota semesta pembicaraan $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$.

Contoh:

1. P = {pria}, W = {wanita}
   M (x, y) ≡ "x menikah dengan y" merupakan fungsi pernyataan pada P x W.

2. A = himpunan bilangan asli.
   K (x, y, z) ≡ $2x - y - 5z < 10$ merupakan fungsi pernyataan pada A x A x A

Fungsi pernyataan dengan beberapa variabel bila diberi tanda kuantor merupakan pernyataan dan mempunyai nilai kebenaran.

$\forall_x \forall_y$ p(x,y) atau $\forall_{x,y}$ p(x,y) atau
(x)(y) p(x,y) atau $(\forall_x)(\forall_y)$ p(x,y)
dibaca “untuk semua x dan y berlakulah p(x)”

$\exists_x \exists_y$ p(x,y) atau $\exists_{x,y}$ p(x,y) atau $(\exists_x)(\exists_y)$ p(x,y)
dibaca “ada x dan y sedemikian hingga p(x,y)”

$\forall_x \exists_y$ p(x,y) atau $(\forall_x)(\exists_y)$ p(x,y) atau (x)$(\exists_y)$ p(x,y)
dibaca “untuk semua x ada y sedemikian hingga p(x,y)”

$\exists_x \forall_y$ p(x,y) atau $(\exists_x)(\forall_y)$ p(x,y) atau $(\exists_x)$ (y)p(x,y)
dibaca “ada x sedemikian hingga untuk semua y berlakulah p(x,y)”

Contoh

P = {Rama, Ammar, Nico} dan
W = {Tira, Iffa}
p(x,y) = "x adalah kakak y"

$(\forall x \in P)(\exists y \in W)(p(x,y))$ = "untuk setiap x di P ada y di W sedemikian hingga x adalah kakak dari y" berarti setiap anggota P adalah kakak dari Tira atau Iffa

$(\exists y \in W)(\forall x \in P)\, p(x,y)$ = "ada y di W sedemikian hingga untuk setiap x di P berlaku x adalah kakak y" berarti ada paling sedikit satu anak di W yang mempunyai kakak semua anggota P.

Negasi Pernyataan

- $(\forall x \in P)(\exists y \in W)(p(x,y))$ = setiap anggota P adalah kakak paling sedikit satu anggota W

- $\sim(\forall x \in P)(\exists y \in W)(p(x,y))$ = tidak benar bahwa setiap anggota P adalah kakak paling sedikit satu anggota W

  atau

  $(\exists x \in P)(\forall y \in W) \sim(p(x,y))$ = ada anggota P yang bukan kakak dari semua anggota W

Latihan

Tentukan nilai kebenaran pernyataan-pernyataan berikut

1. $\forall_x \forall_y \ (x+2y = 10)$
2. $\forall_x \exists_y (x+2y = 10)$
3. $\exists_x \forall_y (x+2y = 10)$
4. $\exists_x \exists_y (x+2y = 10)$
5. $\forall_y \forall_x \ (x+2y = 10)$
6. $\forall_y \exists_x (x+2y = 10)$
7. $\exists_y \forall_x (x+2y = 10)$
8. $\exists_y \exists_x (x+2y = 10)$
9. $\exists_y \forall_x (x^2-y > 3)$
10. $\exists_x \forall_y (x^2-y > 3)$
11. $\forall_y \exists_x (x^2-y \leq 3)$
12. $\forall_y \exists_x (x^2-y \geq 3)$
13. $\exists_y \forall_x (y/x = 8)$
14. $\forall_y \exists_x (y/x \neq 8)$
15. $\exists_y \exists_x (y/x = 8)$
16. $\forall_y \exists_x (y/x = 8)$
17. $\exists_y \exists_x (x + 2y < 10 \wedge x + 3y \geq 9)$
18. $\exists_x \forall_y (x + 2y < 10 \rightarrow x + 3y \geq 9)$

Tulislah dalam bentuk simbolik

Semua bilangan bulat adalah rasional,
dapat ditulis:
$(\forall_x)(B_x \rightarrow R_x)$ atau $(\forall\, x \in B)(x \in R)$

1. Semua mahasiswa lulus ujian.
2. Semua mahasiswa tidak lulus ujian.
3. Tidak semua pedagang merasa beruntung.
4. Tidak semua pedagang tidak merasa beruntung.
5. Ada wanita yang cantik.
6. Beberapa wanita tidak cantik.
7. Tidak ada mahasiswa yang curang.
8. Tidak ada mahasiswa yang tidak curang.

Penarikan Kesimpulan

- Premis: Pernyataan-pernyataan yang digunakan untuk menarik kesimpulan dan yang dianggap benar atau yang diketahui nilai kebenarannya.
- Argumen: Pernyataan yang berupa himpunan/kumpulan beberapa premis dan konklusinya yang ditarik menggunakan aturan yang benar atau valid.
- Argumen dikatakan VALID, jika setiap premis yang digunakan bernilai benar dan konklusinya benar. Jadi bergantung pada bentuk argumen dan tabel kebenaran.
- Jika membuktikan validitas argumen dilakukan dengan menguji apakah argumen itu merupakan TAUTOLOGI.

Beberapa Argumen

1. Modus Ponens

Premis 1 : $p \rightarrow q$
Premis 2 : p

Konklusi : q

2. Modus Tolens

Premis 1 : $p \rightarrow q$
Premis 2 : $\sim q$

Konklusi : $\sim p$

3. Silogisme

Premis 1 : $p \to q$
Premis 2 : $q \to r$

Konklusi : $p \to r$

4. Penyederhanaan

Premis 1 : $p \wedge q$

Konklusi : p

5. Konjungsi

Premis 1 : p
Premis 2 : q

Konklusi : $p \wedge q$

6. Penambahan

Premis 1 : p

Konklusi : $p \vee q$

7. Silogisme Disjungtif

Premis 1 : $p \vee q$
Premis 2 : $\sim p$

Konklusi : q

8. Dilema Konstruktif

Premis 1 : $(p \to q) \wedge (r \to s)$
Premis 2 : $p \vee r$

Konklusi : $q \vee s$

9. Dilema Destruktif

Premis 1 : $(p \to q) \wedge (r \to s)$
Premis 2 : $\sim q \vee \sim s$

Konklusi : $\sim p \vee \sim r$

Tulislah konklusinya (jika ada) dan sebutkan argumen yang dipakai.

1. $p \rightarrow \sim q$
   $\sim q$

   $\therefore$ .....

2. $\sim a \rightarrow b$
   $\sim b$

   $\therefore$ .....

3. $k \rightarrow l$
   $\sim k$

   $\therefore$ .....

4. $d \rightarrow \sim a$
   $\sim d$

   $\therefore$ .....

5. $\sim a \vee b$
   a

   $\therefore$ .....

6. $\sim l \vee \sim m$
   $\sim m$

   $\therefore$ .....

Lanjutan

7. $k \vee \sim l$

   $\sim k$

   $\therefore$ .....

8. $\sim a \rightarrow b$

   $a \rightarrow c$

   $\therefore$ .....

9. $p \rightarrow q$

   $\sim r \rightarrow q$

   $\therefore$ .....

10. $a \rightarrow b$

    $c \vee b$

    $\therefore$ .....

11. $m \rightarrow n$

    $k \rightarrow n$

    $\therefore$ .....

12. $c \vee d$

    $\sim d \vee a$

    $\therefore$ .....

13. $d \vee \sim a$

    $d \vee b$

    $\therefore$ .....

14. $a \leftrightarrow b$

    $c \wedge b$

    $\therefore$ .....

Selidikilah apakah argumen berikut valid atau tidak

1. $p \wedge q$
   $p \to r$

   $\therefore\ r$

2. $p \to q$
   $\sim(q \wedge r)$

   $\therefore\ p \to \sim r$

3. $p \wedge q$
   $p \vee r \to s$

   $\therefore\ p \wedge s$

4. $p \to \sim q$
   $\sim q \to \sim r$
   $s \wedge r$

   $\therefore\ \sim p$

5. $p \to \sim(q \wedge r)$
   $\sim(q \wedge r) \to \sim s$
   $t \vee s$

   $\therefore\ \sim p \vee t$

6. $h \wedge b \to b$
   $b \to r$
   $a \wedge \sim r$

   $\therefore\ \sim h$

7. $c \vee (a \wedge p)$
$c \rightarrow k$
$k \rightarrow p$

$\therefore\ p$

8. $h \wedge a \rightarrow b$
$b \rightarrow r$
$a \wedge \sim r$

$\therefore\ \sim h$

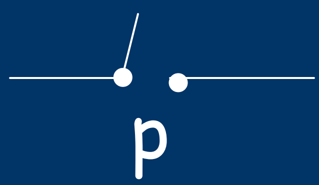
9. $c \rightarrow q$
$s \wedge q \rightarrow e$
$d \wedge s$
$\sim e$

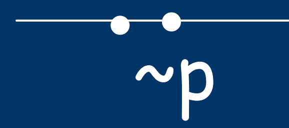
$\therefore\ d \rightarrow \sim c$

10. Buktikan jika $r \vee t \rightarrow (\sim r \rightarrow t)$, $r \vee t$, $\sim r$, maka t.

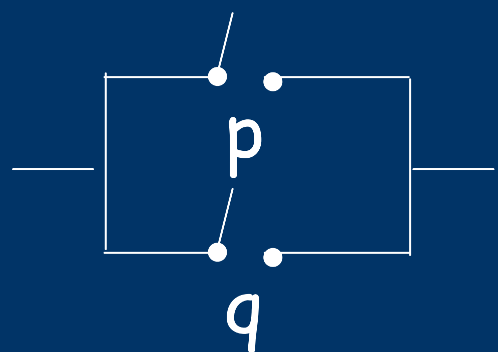
11. Diketahui $\sim(R \wedge T) \rightarrow \sim R \vee \sim T$, $\sim(R \wedge T)$, $\sim R$, $\sim R \vee \sim T \rightarrow (\sim R \rightarrow T)$ mengakibatkan T.

Aplikasi Logika



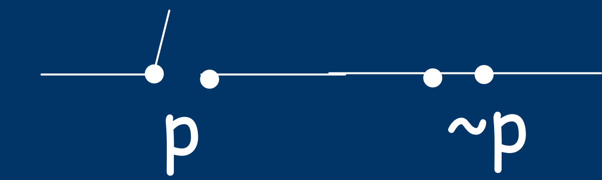


Hubungan Seri: $pq \equiv p \wedge q$

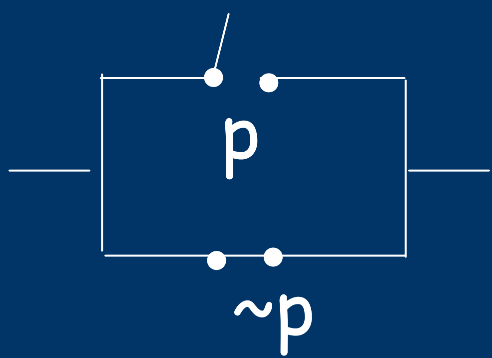


Hubungan Paralel:

$p + q \equiv p \vee q$



$$p.\sim p = 0$$



$$p + (\sim p) = 1$$

$$p\,(q + r) = pq + pr$$

$$p + q\,r = (p + q)\,(p + r)$$

$$p + p = p$$

$$pp = p$$

Latihan